SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. RODINO

RISOLUBILITA' LOCALE PER EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI LINEARI

BOLOGNA, 9 MAGGIO 1985

Consideriamo un operatore alle derivate parziali lineare di ordine m

$$(1) \qquad P = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \partial^\alpha$$

con coefficienti $c_\alpha(x)$ di classe C^∞ in un aperto $\Omega \subset R^n$ (le notazioni in (1) sono quelle standard: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_+^n$, $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$).

Definizione 1: *P è detto localmente risolubile nel punto* $x_0 \in \Omega$ *se esiste un intorno* $V \subset \Omega$ *di* x_0 *in cui, per ogni* $f \in C^\infty(\Omega)$ *assegnata, l'equazione* $Pu = f$ *ha sempre almeno una soluzione (nel senso classico:* $u \in C^m(\Omega)$ con $Pu|_V = f|_V$).

Accanto alla precedente, della risolubilità locale possono considerarsi altre definizioni più o meno restrittive, dove si impone ad esempio che l'intorno V possa scegliersi dipendente da f, o che la soluzione u sia di classe C^∞, oppure sia una distribuzione di Schwartz.

Il problema della determinazione degli operatori localmente (non) risolubili è un problema tipico della teoria moderna degli operatori a derivate parziali lineari. In effetti, nell'insegnamento tradizionale concernente le equazioni della fisica matematica, non si questiona sull'esistenza di almeno una soluzione, ma all'opposto si osserva che le soluzioni di un'equazione a derivate parziali sono sempre una "grande infinità", quando in particolare paragonate all'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria. Tale affermazione trova le sue ragioni nel classico

Teorema 2, di Cauchy-Kovalevsky. *Si suppongano i coefficienti $c_\alpha(x)$ in (1) appartenenti a $Q(\Omega)$, classe delle funzioni analitiche di variabile reale in Ω.*

Si supponga ancora $0 = x_0 \in \Omega$ ed il coefficiente di $\partial^m_{x_n}$ sia $\neq 0$ nell'origine. Siano poi assegnate $f(x) \in Q(\Omega)$ e $g_0(x'), g_1(x'),\dots,g_{m-1}(x') \in Q(\Omega')$ dove $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ ed Ω' è un intorno dell'origine in $R^{n-1}_{x'}$. Allora esiste ed è unica $u(x)$, definita analitica in un intorno dell'origine in R^n, soluzione del problema

$$(2) \qquad \begin{cases} Pu = f \ , \\ (\partial^j_{x_n} u)\big|_{x_n = 0} = g_j \ , \quad j = 0,1,\dots,m-1 \ . \end{cases}$$

Utilizzando un cambio di variabili lineare, si perviene immediatamente al

Corollario 3. *In (1) si supponga $c_\alpha(x) \in Q(\Omega)$, e P sia non-totalmente degenere in $x_0 \in \Omega$, i.e. risulti $c_\alpha(x_0) \neq 0$ per almeno uno dei multi-indici α con $|\alpha| = m$. Allora per ogni f analitica in un intorno di x_0 esiste u, anch'essa analitica in un intorno V di x_0, tale che $Pu = f$ in V.*

Supponendo dunque $c_\alpha(x) \in Q(\Omega)$ e P non-totalmente degenere, così come faremo costantemente nel seguito, il problema della risolubilità locale si pone solamente per dati f che siano C^∞ ma non-analitici. Appunto costruendo un'opportuna $f \in C^\infty(R^3)$ non-analitica, H. Lewy (1957) ha verificato che l'equazione

$$(3) \qquad Pu = \partial_{x_1} u + i\, \partial_{x_2} u + i(x_1 + i x_2)\partial_{x_3} u = f$$

non ha alcuna soluzione in alcun sottoinsieme aperto non-vuoto di R^3.

Il risultato di H. Lewy, primo esempio di operatore non-localmente risolubile, può riguardarsi, da un punto di vista storico, come conseguenza estrema della ben nota critica di Hadamard al teorema di Cauchy-Kovalevsky. Hadamard osserva che il problema (2) è in generale "mal posto"; in particolare, la soluzione di (2) può non esistere se i dati g_j sono scelti di classe C^∞ ma non analitici. Un esempio elementare a questo proposito è dato da

$$(4)\qquad \begin{cases} Pu = \partial_{x_1} u + i\partial_{x_2} u = 0 \\ u\Big|_{x_2 = 0} = g(x_1) = \begin{cases} e^{-1/x_1} & \text{per } x_1 > 0 \\ 0 & \text{per } x_1 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

che non ha soluzione in alcun intorno dell'origine; infatti, l'annullarsi della funzione olomorfa u su di un intervallo $]-\varepsilon,0[$ dell'asse delle x_1 implicherebbe il suo annullarsi identico in un intorno dell'origine nel piano della variabile complessa $z = x_1 + ix_2$, mentre $u\big|_{x_2 = 0} \neq 0$ per $x_1 > 0$.

Alla base della critica di Hadamard vi è, evidentemente, il concetto moderno di funzione; mentre per Cauchy una funzione è tale solo se analitica, in (4) noi pensiamo alla $g(x_1)$ come ad una (unica) funzione infinitamente derivabile ma non analitica.

Tornando al problema della risolubilità locale, l'esempio in (3) mostra che se in (2) noi ammettiamo che la f sia di classe C^∞, allora possiamo ottenere un problema che non ha mai soluzione per alcuna scelta dei dati iniziali g_j.

L'esempio di H. Lewy è stato immediatamente seguito da una condizione necessaria per la risolubilità locale data da Hörmander (1960) e, negli anni successivi, da numerosi altri esempi e risultati. In particolare, Mizohata (1962) ha considerato l'operatore in R^2

(5) $$P = \partial_{x_1} + ix_1^h \partial_{x_2} ,$$

che non è localmente risolubile nell'origine se l'intero h è dispari.

Ispirandosi al modello (5), Nirenberg-Trèves ed Egorov nel 1970 sono giunti ad esprimere una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità degli operatori di tipo principale, generalizzante i risultati di H. Lewy ed Hörmander. Indicato con $p_m(x,\xi)$ il simbolo principale di P, $p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} i^m c_\alpha(x)\, \xi^\alpha$, e supposto d_ξ Re $p_m(x,\xi) \neq 0$ sulla varietà caratteristica $\Sigma = \{p_m(x,\xi) = 0\}$, tale condizione può esprimersi nella maniera seguente

(6) Im $p_m(x,\xi)$ *non cambia segno lungo le bicaratteristiche nulle di* Re $p_m(x,\xi)$

Ad esempio, per l'operatore P in (5) con h dispari (moltiplicato per -i, così che il simbolo principale risulti $\xi_1 + ix_1^h \xi_2$), sulle bicaratteristiche nulle $\{x_1 = t,\ x_2 = x_2^0,\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = \xi_2^0 \neq 0,\ t \in R\}$ si ha un cambiamento di segno della parte immaginaria $x_1^h \xi_2$ per t = 0, e la (6) è quindi violata. In effetti, la dimostrazione della necessità della condizione (6) può essere completamente ricondotta all'analisi dell'operatore di Mizohata, utilizzando la tecnica degli operatori integrali di Fourier; al proposito si veda il recente libro di Hörmander [1] , dove gli operatori di tipo principale, differenziali e pseudodifferenziali, sono studiati in grande dettaglio.

In questi ultimi anni, infine, sono stati ottenuti numerosi risultati di risolubilità e non risolubilità locale per gli operatori con caratteristiche multiple. Mancano peraltro condizioni necessarie e sufficienti di grande generalità, parabonabili a quella ottenuta da Nirenberg-

-Trèves ed Egorov per il tipo principale. Ci limiteremo qui a riportare l'esempio in R^2 di Grušin, ormai classico:

$$(7) \qquad P = \partial^2_{x_1} + x_1^2\,\partial^2_{x_2} + i\lambda\partial_{x_2} \quad ,$$

che è localmente risolubile nell'origine se e solo se λ non è un intero relativo dispari, ed inoltre l'esempio di operatore non risolubile, studiato da Egorov, Menikoff ed altri autori:

$$(8) \qquad P = \partial^2_{x_1} + (x_1 + i)\partial_{x_2}$$

che avremo occasione di ridiscutere nel seguito. Si osservino le differenti proprietà geometriche della varietà caratteristica degli operatori in (7) ed in (8); mentre per P in (8) si ha $\Sigma = \{\xi_1 = 0\}$, per P in (7), così come per l'operatore di Mizohata, Σ è di codimensione 2 e simplettica, risultando definita dall'annullarsi contemporaneo di x_1 e ξ_1.

Terminata questa brevissima rassegna di risultati sulla (non) risolubilità locale, vorremmo ora segnalare una possibile estensione del problema alle classi di Gevrey $G^s(\Omega)$.

Incominciamo col ricordare che f è in $G^s(\Omega)$, $1 \leq s < \infty$, se e solo se f è infinitamente differenziabile in Ω e per ogni $\omega \subset\subset \Omega$ risulta

$$(9) \qquad \sup_{x \in \omega} |D^\alpha f(x)| \leq c^{|\alpha|+1}\, |\alpha|^{s|\alpha|} \quad ,$$

per una costante c indipendente da α.

Definizione 4. *Un operatore P a coefficienti analitici sarà detto s-localmente risolubile nel punto $x_0 \in \Omega$ se esiste un intorno $V \subset \Omega$ di x_0 in cui l'equazione $Pu = f$ ha sempre almeno una soluzione per ogni $f \in G^s(\Omega)$.*

La risolubilità locale implica ovviamente la s-risolubilità locale, per ogni s, $1 \leq s < \infty$; nel caso $s = 1$, inoltre, risulta $G^s(\Omega) = Q(\Omega)$ ed il Corollario 3 assicura l'esistenza diuna soluzione in un intorno opportuno V di x_0.

Il problema interessante è dunque la determinazione della eventuale s-risolubilità degli operatori non-risolubili, per valori di s opportunamente vicini all'unità. Al riguardo, non vi sembra essere alcun risultato nella letteratura. Daremo qui di seguito un teorema concernente l'operatore di Mizohata.

Teorema 5. *Se l'intero* h *è dispari, l'operatore* P *in* (5) *non è s-localmente risolubile nell'origine, per* $1 < s < \infty$.

La dimostrazione è una facile variante della dimostrazione data da Nirenberg [2] della non-risolubilità per $h = 1$.

L'argomento è molto semplice, e lo riportiamo qui per intero.

Supponiamo per assurdo che esista un intorno dell'origine, $V = \{x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon^2\}$, in cui l'equazione $Pu = f$ abbia sempre almeno una soluzione di classe C^1 per ogni $f \in G^s(R^2)$.

Fissiamo quindi in $G^s(R^2)$, $1 < s < \infty$:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-((x_1 - \frac{\varepsilon}{2})^2 + x_2^2 - \frac{\varepsilon^2}{4})^{1/(1-s)}} & \text{per } (x_1 - \frac{\varepsilon}{2})^2 + x_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}, \\ 0 & \text{altrove in } R^2, \end{cases}$$

e sia $u \in C^1(R^2)$ tale che $Pu = f$, dove per semplicità indichiamo ancora con f ed u le rispettive restrizioni a V.

Denotiamo u_p ed u_d la parte pari e la parte dispari di u rispetto alla variabile x_1 : $u_p(x_1, x_2) = u_p(-x_1, x_2)$, $u_d(x_1, x_2) = -u_d(-x_1, x_2)$, e $u(x_1, x_2) = u_p(x_1, x_2) + u_d(x_1, x_2)$.

Decomponiamo analogamente $f(x_1, x_2) = f_p(x_1,x_2) + f_d(x_1, x_2)$ ed osserviamo che supp f_p = supp $f_d = D_+ \cup D_-$, con $D_\pm = \{(x_1 \pm \frac{\varepsilon}{2})^2 + x_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}\}$, ed inoltre $f_p > 0$ all'interno di D_+, D_-.

Risulta:

$$Pu = Pu_p + Pu_d = f$$

dove, essendo h dispari,

$$Pu_p = \partial_{x_1} u_p + ix_1^h \partial_{x_2} u_p$$

risulta dispari, mentre Pu_d risulta pari. Quindi necessariamente

$Pu_f = f_d$, $Pu_d = f_p$.

Ragionando in particolare su u_d, abbiamo che $u_d \in C^1(V)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Pu_d = f_p, \\ u_d\big|_{x_1=0} = 0. \end{cases}$$

Considerato l'aperto connesso $V' = V - (D_+ \cup D_-)$, abbiamo qui

$$\begin{cases} Pu_d = 0, \\ u_d\big|_{x_1=0} = 0 , \end{cases}$$

e quindi $u_d = 0$ in V'. Ciò per il teorema di unicità di Holmgren; oppure, per via elementare, si osservi che $v(t,y) = u_d(((h+1)t)^{1/(h+1)}, y)$ è di classe C^0 per $t \geq 0$, ed olomorfa per $t > 0$ nel piano della variabile complessa $w = t + iy$ se $(x_1 = ((h+1)t)^{1/(h+1)}, x_2 = y) \in V'$. Annullandosi $v(t,y)$ per

$t = 0$, dovrà allora annullarsi anche per $t > 0$.

Ragionando analogamente su $u_d(-((h+1)|t|)^{1/(h+1)}, y)$, si ottiene $u_d = 0$ in tutto V'.

L'assurdo si raggiunge ora osservando che

$$\iint_{D_+} Pu_d \, dx_1 \, dx_2 = \iint_{D_+} f_p \, dx_1 \, dx_2 > 0,$$

mentre, indicata L la frontiera di D_+,

$$\iint_{D_+} Pu_d \, dx_1 dx_2 = \iint_{D_+} \partial_{x_1} u_d \, dx_1 dx_2 + i \iint_{D_+} \partial_{x_2} (x_1^h u_d) \, dx_1 \, dx_2 =$$

$$= \oint_L u_d \, dx_2 - i \oint_L x_1^h u_d \, dx_1 = 0 .$$

Il Teorema 5 è così dimostrato.

Utilizzando la teoria degli operatori integrali di Fourier, e ridimostrando il Teorema 5 da un punto di vista micro-locale, sembra possibile estendere il risultato di non-s-risolubilità a tutti gli operatori di tipo principale; precisamente, si può congetturare che la condizione (6) di Nirenberg-Trèves sia necessaria e sufficiente per la s-risolubilità locale, perogni scelta di $s > 1$.

Passando a considerare gli operatori con caratteristiche multiple in (7) ed (8), è facile verificare che l'operatore di Grušin in (7) è anche non-s-risolubile localmente per ogni $s > 1$, quando λ è un intero relativo dispari; ciò è evidente per $\lambda = -1$ fattorizzando

$$\partial_{x_1}^2 + x_1^2 \partial_{x_2}^2 - i\partial_{x_2} = (\partial_{x_1} + ix_1\partial_{x_2})(\partial_{x_1} - ix_1\partial_{x_2})$$

e può dimostrarsi in generale mediante il metodo delle concatenazioni.

L'operatore non-localmente risolubile in (8) è invece s-localmente risolubile per $1 \leq s \leq 2$, come si può verificare considerando il problema di Cauchy

$$\partial^2_{x_1} u + (x_1 + i)\partial_{x_2} u = f \ ,$$

$$u\big|_{x_1=0} = g_0, \quad \partial_{x_1} u\big|_{x_1=0} = g_1 \ ,$$

f e g_j assegnate di classe G^2, che è noto essere ben posto con soluzione di classe G^2.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators, IV, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1985.

[2] L. NIRENBERG, Lectures on linear partial differential equations, Amer. Math. Soc. Regional Conf. in Math., 17 (1972), 1-58.